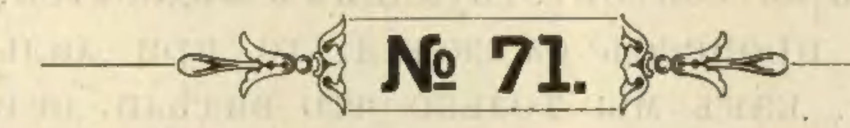
ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



№ 71.

VI Сем. 5 Мая 1889 г. № 11.

О ГАЗООБРАЗНОМЪ И ЖИДКОМЪ состоянiи тѣлъ.

(Продолженiе) *).

III.

Критическое состоянiе тѣлъ.

Въ виду того обстоятельства, что вопросъ о критическомъ состоянiи тѣлъ былъ достаточно подробнымъ образомъ разобранъ проф. Авенарiусомъ въ одномъ изъ прежнихъ нумеровъ *) этого-же журнала, когда онъ издавался проф. Ермаковымъ и носилъ названiе „Журнала Элементарной Математики“, мы и ограничимся здѣсь только нѣкоторыми общими указанiями, не вдаваясь слишкомъ въ разныя подробности. Обойти вообще молчанiемъ этотъ важный вопросъ совершенно немыслимо, такъ какъ ученiе о критическомъ состоянiи тѣлъ, т. е. ученiе о томъ состоянiи, когда всякое различiе между жидкостью и газомъ совершенно изглаживается, слишкомъ важно для разбираемаго нами вопроса, представляя собою, такъ сказать, звено, связывающее кинетическую теорiю газовъ съ такою-же кинетическою теорiею жидкостей.

Въ предыдущемъ § мы видѣли, что никакiе газы не слѣдуютъ въ точности законамъ Бойля-Марiотта и Гей-Люссака, и что вообще съ увеличенiемъ давленiя объемъ газа уменьшается быстрѣе, чѣмъ слѣдовало-бы по вышеупомянутому закону. Такое отклоненiе мы объяснили влiянiемъ внутренняго сцѣпленiя газовъ, которое обнаруживается вообще тѣмъ сильнѣе, чѣмъ больше то давленiе, которому испытуемый газъ подверженъ. Увеличивая далѣе давленiе (при постоянной температурѣ), т. е. уменьшая объемъ, занимаемый газомъ, мы достигнемъ наконецъ, если только температура достаточно низка, такой точки, когда дальнѣйшее уменьшенiе объема не будетъ уже болѣе сопровождаться соотвѣтствен

*) См. „Вѣстникъ“ №№ 65, 67 и 69.

*) Авенарiусъ. Критическое состоянiе тѣлъ. „Журналъ Элементарной Математики“. Т. I, стр. 89.

нымъ увеличеніемъ давленія, а взамѣнъ этого часть вещества перейдетъ изъ газообразнаго состоянія въ жидкое. Это явленіе, какъ извѣстно, есть ничто иное, какъ явленіе сжиженія газовъ, и то предѣльное давленіе, при которомъ это ожиженіе происходитъ, равно такъ называемой упругости насыщеннаго пара, образовавшейся при ожиженіи жидкости. Такимъ образомъ мы можемъ вообще разсматривать всякіе газы какъ ненасыщенные пары соотвѣтствующихъ жидкостей. Когда при сжиманіи газа начинается процессъ ожиженія, то при дальнѣйшемъ уменьшеніи объема давленіе, какъ мы только что видѣли, остается безъ измѣненія, но взамѣнъ того все большая и большая часть газообразной части даннаго вещества переходитъ въ жидкое состояніе, и только съ исчезновеніемъ послѣднихъ остатковъ насыщеннаго пара новое уменьшеніе объема будетъ уже вновь сопровождаться соотвѣтственнымъ увеличеніемъ давленія и въ этомъ случаѣ несравненно болѣе значительнымъ, чѣмъ прежде, такъ какъ жидкости, какъ намъ изъ другихъ опытовъ извѣстно, обладаютъ, вообще говоря, очень малою сжимаемостью, такъ что всякое малое измѣненіе объема должно уже сопровождаться значительными измѣненіями въ давленіи.

Причина сжиженія газовъ и вообще перехода тѣлъ изъ газообразнаго состоянія въ жидкое лежитъ въ ихъ внутреннемъ сцѣпленіи т. е. въ притягательномъ дѣйствіи однихъ частицъ на другія. Когда отъ уменьшенія объема, т. е. отъ уменьшенія средняго относительнаго разстоянія частицъ, это притягательное дѣйствіе достигнетъ нѣкоторой опредѣленной данными условіями величины, то газъ получитъ возможность перейти въ жидкое состояніе, и мы будемъ тогда имѣть предъ собою новое состояніе того-же тѣла. Ожиженіе газовъ сопровождается вообще быстрымъ уменьшеніемъ объема *), но съ постепеннымъ возвышеніемъ температуры, разница между объемами, занимаемыми тѣмъ же тѣломъ въ газообразномъ и жидкомъ состояніяхъ при давленіи, ровномъ упругости насыщенныхъ паровъ (для температуры наблюденій), дѣлается все меньше и меньше, и при нѣкоторой достаточно высокой температурѣ совершенно исчезаетъ, дѣлаясь равною нулю, т. е. тѣло непрерывнымъ образомъ переходитъ изъ газообразнаго состоянія въ жидкое. Эта температура является нѣкоторой вполнѣ характеристичной температурой для даннаго тѣла, и Andrews **), который своими замѣчательными изслѣдованіями надъ сжимаемостью углекислоты при различныхъ температурахъ далъ такой громадный толчекъ изысканіямъ подобнаго рода, назвалъ ее *критической температурой* даннаго тѣла.

Взглянемъ теперь на вопросъ съ другой точки зрѣнія. Увеличивая давленіе, испытываемое жидкостью, можно, вообще говоря, удержать переходъ ея въ парообразное состояніе, т. е. удержать ея кипѣніе, но при нѣкоторой достаточно высокой температурѣ никакимъ увеличеніемъ давленія нельзя уже болѣе задержать кипѣнія, и вся жидкость переходитъ цѣликомъ въ паръ. Соотвѣтствующая этому явленію температура, названная очень удачнымъ образомъ Менделѣевымъ *температурой абсолют-*

---

*) См. Авенаріусъ. Критическое состояніе тѣлъ.

**) Phil. Trans. 1869. Part. II.

Также Pog. Ann. Erg. Bd. V.

наго кипѣнія, и есть ничто иное, какъ инымъ образомъ охарактеризованная критическая температура даннаго тѣла.

Представимъ себѣ теперь еще слѣдующій процессъ, который послужитъ къ тому, чтобы нагляднѣе уяснить себѣ самую сущность критическаго состоянія тѣлъ. Извѣстно, что изъ подъема жидкости въ капиллярныхъ трубкахъ можно легко опредѣлить соотвѣтствующую капиллярную постоянную или такъ называемое поверхностное натяженіе, которое и служитъ до нѣкоторой степени мѣрою силы сцѣпленія частицъ соотвѣтствующей жидкости. Благодаря существованію этого поверхностнаго натяженія, жидкость и получаетъ именно возможность принимать опредѣленную фигуру равновѣсія, и если мы представимъ себѣ эту жидкость совершенно уединенною въ пространствѣ, то эта фигура равновѣсія будетъ шаръ. Опытъ теперь показываетъ, что по мѣрѣ возвышенія температуры поверхностное натяженіе непрерывно уменьшается; слѣдовательно должна существовать нѣкоторая опредѣленная температура, при которой это поверхностное натяженіе сдѣлается равнымъ нулю, при чемъ изъ эмпирической зависимости для измѣненія этого элемента съ температурой легко экстраполяціей опредѣлить приблизительно и самую величину этой предѣльной температуры. Такъ какъ въ этомъ случаѣ поверхностное натяженіе равно нулю, то жидкость не можетъ сохранять болѣе никакой опредѣленной формы и ея частицы, слѣдовательно, начнутъ разсѣиваться въ пространствѣ, т. е. существованіе жидкости сдѣлается уже болѣе невозможнымъ, и она необходимо должна будетъ перейти въ парообразное состояніе, чѣмъ собственно говоря и обусловливается характерная особенность критическаго состоянія тѣлъ.

Такъ напримѣръ для обыкновеннаго этиловаго эѳира капиллярная постоянная k (выраженная высотой подъема жидкости въ трубкѣ въ одинъ миллиметръ радіуса) выражается согласно съ Brunner'омъ *) слѣдующей простой линейной функціей температуры:

$$k = 5{,}3536 - 0{,}028102t.$$

$k=0$ даетъ $t=190{,}5$ Ц.

Непосредственныя-же наблюденія Зайончевскаго даютъ для критической температуры эѳира 190,0 Ц. Согласіе, какъ видно, прекрасное.

Вообще, если заключить жидкость въ узкую трубку и, подвергая ее постепенному нагрѣванію, слѣдить за формой мениска, ограничивающаго свободную поверхность жидкости, то съ приближеніемъ къ критической температурѣ мы увидимъ, что менискъ становится все площе и площе, выпрямляется затѣмъ въ прямую и наконецъ при самой критической температурѣ совершенно исчезаетъ. Жидкости въ этотъ моментъ, собственно говоря уже болѣе не существуетъ, и вся трубка наполняется однородной массой. Итакъ критическая температура есть та предѣльная температура, выше которой существованіе данной жидкости становится уже болѣе невозможнымъ. Обратно, исходя изъ газообразнаго состоянія тѣла, если только температура дѣйствительно выше критической, никакими сильными давленіями нельзя заставить данный газъ перейти въ жидкое со-

*) См. Wüllner. Lehrbuch der Experimentalphysik. IV. Aufl. Bd. III. p. 789.

стояніе. Продолжая увеличивать давленіе, будемъ постепенно уменьшать объемъ газа, но это уменьшеніе будетъ совершенно непрерывное и мы нигдѣ при этомъ процессѣ не встрѣтимъ тѣхъ характеристичныхъ признаковъ, которыми сопровождается всегда переходъ тѣла изъ газообразнаго состоянія въ жидкое.

До сихъ поръ мы не дѣлали никакого различія между словами пары и газы, потому что какъ тѣ, такъ и другіе представляютъ намъ примѣры тѣлъ въ газообразномъ состояніи; но, употребляя слово „паръ", мы неявнымъ образомъ допускаемъ существованіе жидкости, отъ которой данный паръ именно и произошелъ. Теперь, познакомившись съ характерными особенностями критическаго состоянія тѣлъ, можно уже, согласно съ Andrews'омъ *), дать болѣе точное опредѣленіе понятію о газѣ и парѣ. А именно, такъ какъ при температурахъ выше критической существованіе жидкости становится уже болѣе невозможнымъ, то не могутъ при этихъ условіяхъ существовать въ строгомъ смыслѣ слова и пары, и слѣдовательно то, что мы тогда наблюдаемъ, надо называть, согласно съ Andrews'омъ, не паромъ, а газомъ. Обратно, при всѣхъ температурахъ ниже критической газу должно быть присвоено названіе пара. Это разграниченіе понятій о газѣ и парѣ, хотя совершенно и раціональное, но для нашей цѣли въ сущности излишнее, такъ какъ на самомъ дѣлѣ нѣтъ никакой принципіальной разницы между паромъ и газомъ, и если только помнить, что при температурахъ выше критической ожиженіе газовъ становится уже болѣе невозможнымъ, то можно уже совершенно безразлично употреблять слова паръ или газъ, не опасаясь никакихъ недоразумѣній или неясностей въ изложеніи.

Кромѣ критической температуры, характерными элементами критическаго состоянія тѣлъ являются еще такъ называемые критическій объемъ и критическое давленіе. Эти два элемента вмѣстѣ съ критической температурой суть для того-же тѣла три вполнѣ опредѣленныя и очень характеристичныя величины, которыя въ теоретическомъ отношеніи имѣютъ чрезвычайно важное значеніе и которымъ вѣроятно суждено еще играть въ высшей степени важную роль въ дальнѣйшемъ развитіи теоріи жидкостей. Дѣйствительно, критическое состояніе тѣлъ представляетъ ту замѣчательную особенность, что оно является заразъ предѣломъ какъ жидкаго, такъ и газообразнаго состоянія, и хотя тѣла въ этихъ двухъ состояніяхъ обладаютъ, вообще говоря, совершенно различными свойствами и подчиняются вообще совершенно различнымъ законамъ, но при критической температурѣ характеристичныя особенности жидкаго и газообразняго состояній сглаживаются и жидкость, повидимому, совершенно отождествляется со своимъ паромъ. Поэтому О. Е. Meyer и называетъ ученіе о критическомъ состояніи тѣлъ тѣмъ мостомъ, по которому со временемъ можно надѣяться перейти отъ кинетической теоріи газовъ къ такой-же кинетической теоріи жидкостей.

Какимъ именно образомъ эти три основные элемента, соотвѣтствующіе критическому состоянію жидкостей, опредѣляются на опытѣ, мы не станемъ здѣсь разбирать, такъ какъ указанія объ этомъ можно найти въ вышеупомянутой статьѣ проф. Авенаріуса. Здѣсь сѣдуетъ однако

*) Phil. Trans. Vol. 159. (II). 1869. p. 575.

замѣтить, что въ этихъ опредѣленіяхъ особенно дѣятельное участіе принимала кіевская физическая лабораторія, при чемъ еще за послѣднее именно время литература о критическомъ состояніи тѣлъ обогатилась новыми обстоятельными изслѣдованіями А. И. Надеждина *) надъ разными эѳирами жирныхъ кислотъ. Этотъ къ сожалѣнію столь рано умершій изслѣдователь предложилъ также совершенно новый и очень остроумный способъ для опредѣленія критической температуры непрозрачныхъ тѣлъ. Не вдаваясь въ различныя подробности, напомнимъ здѣсь только вкратцѣ принципъ прибора Надеждина **).

Стеклянная или металлическая трубочка, скрѣпленная съ обоймицей, устанавливается на подставкѣ совершенно подобно коромыслу вѣсовъ, для чего у обоймицы придѣлана призма, на ребро которой весь приборъ и упирается. Оставляя трубку пустою, уравновѣшиваютъ ее при посредствѣ небольшихъ грузовъ. Если затѣмъ ввести извѣстное количество жидкости въ трубку и запаять ее, то трубка наклонится; когда-же постепеннымъ нагрѣваніемъ прибора мы дойдемъ до критической температуры испытуемой жидкости, то вся трубка наполнится однородной массой и придетъ слѣдовательно опять къ горизонтальное положеніе. Соотвѣтствующая этому положенію температура и есть слѣдовательно ничто нное, какъ искомая критическая температура даннаго тѣла. Этимъ способомъ Надеждинъ опредѣлилъ напримѣръ критическою температуру воды ***) и нашелъ для нея въ среднемъ 358°Ц. Это, можно сказать, единственное прямое опредѣленіе критической температуры воды, такъ какъ старинныя наблюденія Cagniard de Latour'a ****) надо признать еще очень несовершенными.

Для наглядности и для лучшаго обозрѣнія всего сказаннаго, въ слѣдующей таблицѣ приведены для нѣкоторыхъ тѣлъ данныя, характеризующія ихъ критическое состояніе, а именно критическія давленія, выраженныя въ атмосферахъ, и критическія температуры въ градусахъ Цельзія *****).

ВЕЩЕСТВО.	Крит. темп.	Крит. давл.
Водородъ (H_2)	—174°,2Ц.	98,9 атм.
Азотъ (N_2)	—123 ,8	42,1
Кислородъ (O_2)	—105 ,4	48,7
Угольный ангидридъ (CO_2) .	+ 32 ,0	77,0
Сѣрнистый ангидридъ (SO_2) .	+155 ,4	78,9
Хлорнстый этилъ (C_2H_5Cl) .	+182 ,6	52,6
Эфиръ ($C_4H_{10}O$)	+190 ,0	36,9
Алькоголь (C_2H_6O)	+234 ,3	62,1
Хлороформъ ($CHCl_3$)	+260 ,0	54,9

*) Физическія изслѣдованія. Кіевъ. 1887. Также Exner's Repertorium. Bd. 23.

**) См. статью Э. Шпачинскаго въ „Журналѣ Элементарной Математики“ Т. I. стр. 241.

***) Вода при очень высокихъ температурахъ разъѣдаетъ стекло.

****) Ann. de Chim et de Phys XXI. 1822.

*****) Tabellen von Landolt und Börnstein. p. 62. Berlin. 1883.

Ограничившись этими общими указаніями, перейдемъ теперь къ нѣсколько болѣе подробному разбору одного изъ уравненій состоянія въ примѣненіи его къ вопросу о критическомъ состояніи тѣлъ. Такой разборъ можетъ быть тѣмъ полезенъ, что онъ дастъ возможность глубже вникнуть въ самую сущность критическаго состоянія жидкостей и уяснить себѣ нагляднымъ образомъ, чѣмъ именно это замѣчательное состояніе тѣлъ обусловливается. Для этого мы возьмемъ, какъ и прежде, формулу Van der Waals'a, опять таки не въ виду ея теоретическаго преимущества передъ формулами Clausius'а напримѣръ, а исключительно въ виду ея простоты, изящности и наглядности.

Уравненіе Van der Waals'a имѣетъ, какъ мы видѣли въ предыдущемъ §, слѣдующій видъ:

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)-\mathrm{R}(1+\alpha t)=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Здѣсь a представляетъ собою величину, характеризующую внутреннее сцѣпленіе частицъ, а b есть учетверенный молекулярный объемъ. Если выражать давленія p въ атмосферахъ и принять за единицу объемовъ, объемъ, занимаемый данной массой при температурѣ 0°Ц и при давленіи одной атмосферы, то, какъ мы видѣли,

$$\mathrm{R}=(1+a)(1-b). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

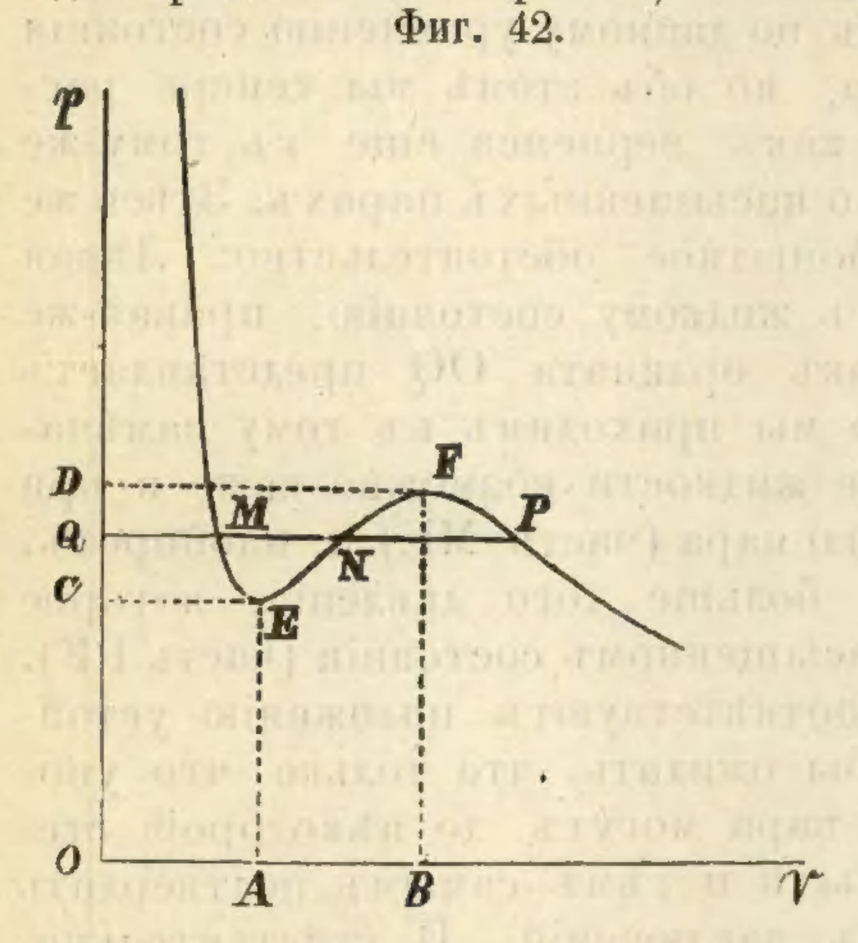
Разсмотримъ сначала зависимость между p и v при нѣкоторой постоянной температурѣ t; уравненіе (1) носитъ въ этомъ случаѣ названіе уравненія изотермы. Если мы будемъ представлять это уравненіе графически и будемъ по оси абсциссъ откладывать объемы, а по оси ординатъ соотвѣтствующія давленія, то въ томъ частномъ случаѣ когда a и b равны нулю, уравненіе (1) превратится въ уравненіе равнобочной гиперболы (отнесенной къ своимъ ассимптотамъ), которую и принимали за уравненіе изотермы такъ называемыхъ идеальныхъ газовъ. Если-же a и b не равны нулю, то, умноживъ все выраженіе на v^2 и развернувъ скобки, мы получимъ для вычисленія v по заданному напередъ p уравненіе третьей степени. Уравненія третьей степени имѣютъ всегда по крайней мѣрѣ одинъ вещественный корень, но возможны, какъ извѣстно, случаи, когда всѣ три корня будутъ вещественны*). Итакъ для той-же температуры t могутъ существовать извѣстныя давленія p, при которыхъ v имѣетъ три вещественныя значенія, т. е. то-же тѣло можетъ при той-же температурѣ и при томъ-же давленіи занимать три совершенно опредѣленные объема и находиться при этомъ въ равновѣсіи. Существованіе двухъ такихъ объемовъ мы можемъ легко себѣ представить. Дѣйствительно, при давленіи, соотвѣтствующемъ упругости насыщенныхъ паровъ для данной температуры, то-же тѣло можетъ являться какъ въ жидкомъ, такъ и въ газообразномъ состояніи, и каждому такому состоянію соотвѣтствуетъ при данныхъ условіяхъ нѣкоторый вполнѣ опредѣленный объемъ. Какое же значеніе имѣетъ этотъ третій объемъ, на

*) Случай двухъ вещественныхъ корней немыслимъ, если уравненіе имѣетъ вещественные коэффиціенты.

существованіе котораго наше уравненіе несомнѣннымъ образомъ указываетъ? Очевидно, что это не тотъ объемъ, который данное тѣло занимаетъ въ твердомъ состояніи, потому что о твердомъ состояніи теперь и рѣчи нѣтъ, такъ какъ уравненіе (1) относится исключительно только къ газообразному и жидкому состоянію тѣлъ и то только не для слишкомъ малыхъ объемовъ v; къ тому-же, какъ мы сейчасъ покажемъ, этотъ третій объемъ больше объема, занимаемаго тѣломъ въ жидкомъ состояніи.

Для лучшаго уясненія вопроса обратимся къ слѣдующему чертежу, гдѣ представлена кривая, связывающая давленія съ соотвѣтствующими объемами въ самомъ общемъ случаѣ, когда a и b не равны нулю. Эта кривая представляетъ собою изотерму Van der Waals'а для нѣкоторой опредѣленной температуры t ниже критической. Каждому давленію p соотвѣтствуетъ, вообще говоря, одинъ только объемъ v, такъ какъ прямыя, проведенныя параллельно оси абсциссъ, встрѣчаютъ кривую вообще только въ одной точкѣ; но если численная величина давленія p заключена между величинами ординатъ OC и OD, что напримѣръ для давленія насыщеннаго пара и должно именно имѣть мѣсто, то тому-же давленію p=OQ соотвѣтствуютъ уже три объема v, опредѣляемые абсциссами точекъ M (жидкій), P (газообразный) и N (промежуточный). Объемы (M) и (P) мы дѣйствительно наблюдаемъ. Куда-же дѣвается третій объемъ? Отчего-же онъ не поддается измѣренію? Причина этого повидимому страннаго и неожиданнаго обстоятельства кроется однако въ томъ, что, занимая объемъ (N), тѣло находится, хотя и въ равновѣсіи, но въ равновѣсіи неустойчивомъ и оно не можетъ поэтому оставаться въ этомъ промежуточномъ состояніи. Дѣйствительно, допустимъ на одно мгновеніе, что тѣло занимаетъ объемъ (N) и что этотъ объемъ отъ какой бы то ни было причины нѣсколько уменьшился. Это уменьшеніе объема повлечетъ за собою, какъ видно изъ чертежа, соотвѣтствующее *уменьшеніе* въ давленіи, вслѣдствіе чего объемъ еще болѣе уменьшится, отсюда новое уменьшеніе въ давленіи и т. д. Въ общемъ-же случаѣ всякому уменьшенію объема соотвѣтствуетъ нѣкоторое *увеличеніе* давленія, препятствующее дальнѣйшему сокращенію тѣла; въ этой-же части изотермы, между точками E и F, опредѣляемыми тѣмъ, что въ нихъ касательныя къ кривой становятся параллельными оси абсциссъ, будетъ какъ разъ наоборотъ, и наше тѣло будетъ вслѣдствіе этого находиться въ неустойчивомъ равновѣсіи, такъ что осуществленіе этого третьяго, теоретическимъ путемъ найденнаго объема, становится на практикѣ дѣломъ невозможнымъ.

Фиг. 42.



Давленія OC и OD опредѣляютъ собою вмѣстѣ съ тѣмъ тѣ границы, между которыми должно лежать давленіе, соотвѣтствующее упру-

гости насыщеннаго пара, при чемъ еще эти двѣ ординаты ограничиваютъ ту часть кривой, гдѣ уравненіе изотермы можетъ имѣть три вещественные корня.

Спрашивается теперь на какой именно высотѣ надо провести прямую QP чтобы ордината OQ дѣйствительно представила собою упругость насыщеннаго пара? Въ разборъ этого вопроса мы здѣсь входить не можемъ *), но сущность дѣла заключается въ томъ, что, какъ показалъ Clausius на основаніи второго принципа термодинамики, ордината OQ только въ томъ случаѣ представитъ собою упругость насыщеннаго пара, если площадь MNE будетъ равна площади NFP. Отсюда уже какъ видно является полная возможность по данному уравненію состоянія вычислить упругость насыщеннаго пара, но объ этомъ мы теперь распространяться здѣсь не будетъ, такъ какъ вернемся еще къ тому-же самому вопросу впослѣдствіи въ отдѣлѣ о насыщенныхъ парахъ. Здѣсь же обратимъ вниманіе на одно очень любопытное обстоятельство. Лѣвая вѣтвь кривой до точки E соотвѣтствуетъ жидкому состоянію, правая-же до точки F газообразному, и, такъ какъ ордината OQ представляетъ собою упругость насыщеннаго пара, то мы приходимъ къ тому замѣчательному результату, что существованіе жидкости возможно даже и при давленіяхъ меньше давленія насыщеннаго пара (часть ME) и, наоборотъ, давленіе пара можетъ быть нѣсколько больше того давленія, которое соотвѣтствуетъ упругости паровъ въ насыщенномъ состояніи (часть PF). Такъ какъ части изотермы ME и FP соотвѣтствуютъ положенію устойчиваго равновѣсія тѣла, то слѣдовало бы ожидать, что только что упомянутыя аномаліи въ ходѣ жидкости и пара могутъ до нѣкоторой степени найти свое подтвержденіе и на опытѣ и тѣмъ самымъ подтвердить справедливость нашихъ теоретическихъ заключеній. И дѣйствительно, наблюденія Donny, Krebs'а и другихъ показываютъ несомнѣннымъ образомъ, что, принимая нѣкоторыя предосторожности, можно сохранить тѣло въ жидкомъ состояніи и при давленіяхъ меньше давленія, соотвѣтствующаго упругости насыщеннаго пара. Что-же касается пересыщеннаго состоянія пара, соотвѣтствующаго части FP изотермы, то тутъ труднѣе уже что-нибудь опредѣленное сказать; рѣшающихъ наблюденій пока еще не имѣется, но разныя аномаліи, встрѣчаемыя вообще при опредѣленіи плотности насыщенныхъ паровъ жидкостей **), говорятъ въ пользу существованія этой характеристичной вѣтви изотермы поровъ.

Все сказанное до сихъ поръ относится къ той-же постоянной температурѣ t, и мы видѣли, что существуютъ вообще давленія (между OC и OD), для которыхъ то-же тѣло можетъ принимать три опредѣленные объема. Если же мы теперь начнемъ возвышать температуру и снова для этой новой, болѣе высокой температуры построимъ изотерму, то мы увидимъ, что разница давленій, соотвѣтствующихъ точкамъ E и F, иначе говоря линія CD, нѣсколько уменьшится. Увеличивая температуру еще больше, мы достигнемъ наконецъ такой температуры, при которой

*) См. Van der Waals. Continuität etc p. 92. Clausius. Wied Ann 9. p. 337 1880.

*) См. Wüllner. Lehrbuch der Experimentalphysik. Bd. III. p. 785. IV Aufl.

CD сдѣлается равною нулю и произойдетъ совпаденіе всѣхъ трехъ объемовъ (M), (N) и (P), т. е. уравненіе (1) будетъ имѣть три вещественные и равные корня. При еще болѣе высокой температурѣ изотерма теряетъ свой характеристичный изгибъ (MENFP), такъ какъ уравненіе (1) имѣетъ тогда уже два мнимые корня. Такимъ образомъ при этихъ высокихъ температурахъ каждому давленію соотвѣтствуетъ только одинъ возможный объемъ, такъ что въ этомъ случаѣ не можетъ быть болѣе рѣчи о жидкости и ея парѣ, такъ какъ тѣло представляется намъ только въ одномъ возможномъ состояніи. Изъ только что сказаннаго слѣдуетъ уже совершенно яснымъ и непосредственнымъ образомъ, что случай трехъ равныхъ вещественныхъ корней уравненія (1) и соотвѣтствуетъ именно критической температурѣ тѣла. Этотъ въ высшей степени изящный результатъ даетъ намъ тотчасъ же возможность по извѣстнымъ величинамъ a и b получить вычисленіемъ три характеристичные элемента p, v и t критическаго состоянія тѣлъ, которые мы въ отличіе отъ обыкновенныхъ элементовъ обозначимъ значками внизу — p_1, v_1 и t_1.

Уравненіе (1) можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ:

$$v^3-\left\{b+\frac{(1+a)(1-b)(1+\alpha t)}{p}\right\}v^2+\frac{a}{p}v-\frac{ab}{p}=0\ldots.(3)$$

При критической температурѣ всѣ три объема должны быть равны между собою и равны критическому объему v_1. Слѣдовательно уравненіе (3) должно представлять собою полный кубъ

$$(v-v_1)^3=v^3-3v_1v^2+3v_1^2v-v_1^3=0.$$

Сравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ v, получаемъ:

$$b+\frac{(1+a)(1-b)(1+\alpha t_1)}{p_1}=3v_1 \quad \ldots\ldots (4)$$

$$\frac{a}{p_1}=3v_1^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\frac{ab}{p_1}=v_1^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Дѣля (6) на (5), имѣемъ:

$$v_1=3b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Изъ (7) и (5)

$$p_1=\frac{a}{27b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Изъ (7) и (4)

$$(1+\alpha t_1)=\frac{8}{27}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{(1+a)(1-b)} \quad \ldots\ldots (9)$$

или приблизительно, пренебрегая a и b предъ 1,

$$(1+\alpha t_1)=\frac{8}{27}\cdot\frac{a}{b} \qquad \text{. . . . . (9')}$$

Мы видимъ такимъ образомъ въ какой тѣсной зависимости находятся элементь критическаго состоянія тѣлъ отъ основныхъ коэффиціентовъ a и b, опредѣляющихъ собою свойства данной жидкости.

Мы видѣли раньше (въ § II), что эти постоянныя a и b могутъ быть опредѣлены изъ наблюденій надъ сжимаемостью газовъ, изслѣдуя отступленія послѣднихъ отъ закона Бойля-Маріотта. Такъ напримѣръ Van der Waals получилъ этимъ способомъ для углекислоты слѣдующія величины (выраженныя во взятыхъ нами единицахъ) для постоянныхъ a и b:

$$a=0{,}00874 \qquad b=0{,}0023.$$

Съ этими величинами можно по формуламъ (8) и (9) вычислить критическое давленіе и критическую температуру и сравнить полученныя такимъ образомъ числа съ дѣйствительно наблюденными. Особеннаго большаго согласія мы ожидать не въ правѣ, во первыхъ потому, что, какъ мы раньше (§ II) видѣли, коэффиціенты a и b нельзя признать совершенно постоянными величинами, а потому и формулы (7), (8) и (9) нельзя считать совершенно строгими; во вторыхъ-же точное опредѣленіе критической температуры и давленія связано на практикѣ съ большими затрудненіями, такъ что числа, данныя различными наблюдателями для того-же тѣла, часто значительно отличаются другъ отъ друга *). Такъ напримѣръ для бензола (C_6H_6) по Зайончевскому **).

$$t_1=280{,}6 \qquad p_1=49{,}5 \text{ атм.}$$

по Ramsay'ю-же

$$t_1=291{,}5 \qquad p_1=90{,}5 \text{ атм.}$$

Для углекислоты Andrews нашелъ $t_1=30°{,}9$, p_1-же приблизительно 70 атм. (Числа, данныя въ предыдущей таблицѣ для углекислоты нѣсколько отличаются отъ нихъ; они были заимствованы у Sarrau).

Подставивъ предыдущія значенія для a и b въ уравненія (8) и (9), мы получимъ для критической температуры и критическаго давленія углекислоты слѣдующія величины:

$$t_1=32°{,}5Ц \qquad p_1=61 \text{ атм.}$$

Обыкновенно пользуются этой теоріей для рѣшенія обратной задачи, т. е. по извѣстной критической температурѣ и критическому давленію какой-нибудь жидкости опредѣляютъ ея характеристичныя постоянныя a и b.

*) Примѣсь посторонняго тѣла можетъ также значительно повліять на величину критической температуры.

**) Tabellen voz Landolt und Börnstein. p. 62 Berlin 1883.

Въ заключеніе обратимъ вниманіе на слѣдующее обстоятельство. Приблизительно, въ нашихъ единицахъ

$$pv=(1+\alpha t).$$

Если-бы законы Бойля-Маріотта и Гей-Люссака были дѣствительно справедливы, то мы очевидно должны-бы были также имѣть:

$$p_1 v_1=(1+\alpha t_1)$$

На самомъ-же дѣлѣ, опредѣляя p_1 и v_1 изъ уравненій (7) и (8) и вводя величину t_1 изъ уравненія (9′), мы имѣемъ

$$p_1 v_1=\frac{3ba}{27b^2}=\frac{1}{9}\cdot\frac{a}{b}=\frac{3}{8}(1+\alpha t_1).$$

То есть при критической температурѣ плотность газа будетъ почти въ 3 раза ($^8/_3$) больше той, какой слѣдовало бы ожидать, если бы два вышеупомянутые закона дѣйствительно служили во всей строгости выраженіемъ основныхъ свойствъ газообразныхъ тѣлъ.

Б. Голицынъ (Страсбургъ).

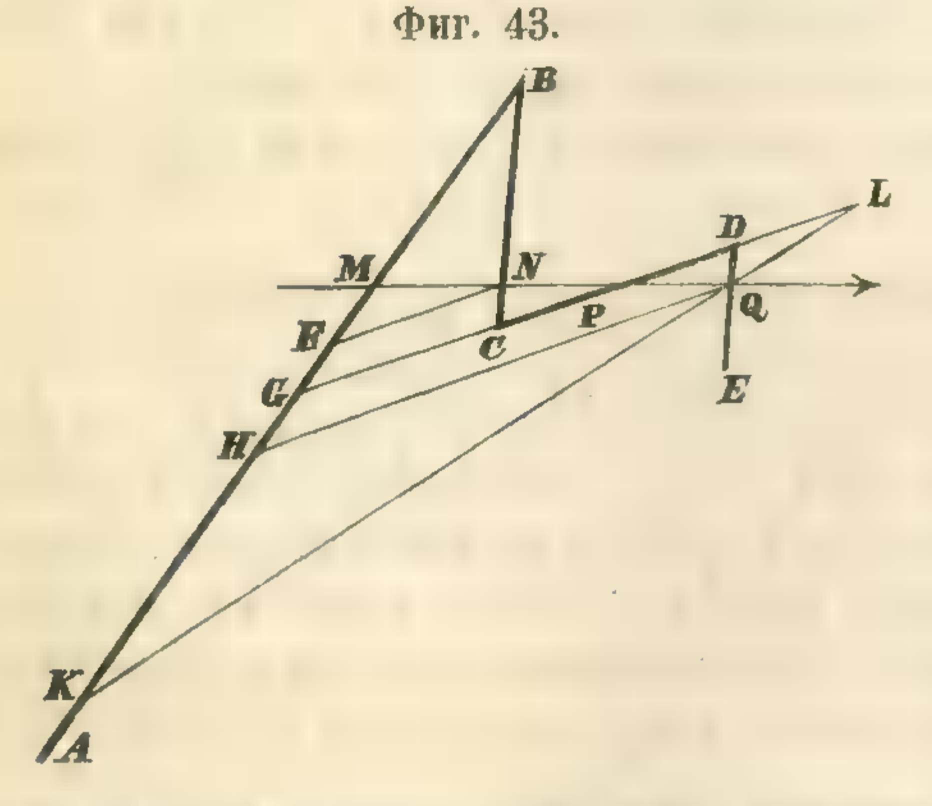
(*Продолженіе слѣдуетъ*).

ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ УПРАЖНЕНІЯ.

(Заимств. изъ Journ. de math. élém.)

Пусть даны четыре прямыя линіи AB, BC, CD, DE, образующія ломанную вогнутую линію; требуется провести нѣкоторую сѣкущую такъ, чтобы отрѣзки MN, NP, PQ были равны между собою (фиг. 43).

Фиг. 43.



Для точнаго опредѣленія сѣкущей достаточно, какъ извѣстно, знать положеніе двухъ точекъ этой линіи. Предположимъ, что сѣкущая уже проведена и опредѣлимъ положеніе двухъ ея точекъ. Съ этой цѣлью продолжимъ DC до пересѣченія съ прямой AB въ точкѣ G. Затѣмъ проведемъ изъ точекъ N и Q линіи параллельныя той-же прямой DC. Изъ чертежа видно, что PG=2NF; дѣйствительно изъ подобныхъ треугольниковъ MFN и MGP имѣемъ, что PG:NF=PM:NM; но PM по условію равно 2NM, а потому и PG=2NF. Точно по такому же способу найдемъ, что QH=3NF.

Отложимъ теперь GK=GB и соединимъ точки K и Q. Продолженіе линіи QK встрѣтитъ продолженіе линіи DC въ точкѣ L. Подобные треугольники GKL и HKQ даютъ намъ

$$GL:HQ=GK:HK. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Но по доказанному HQ=3NF, а по построенію GK=BG. Вычитая изъ послѣдняго равенства по GH, получимъ HK=BF; стало быть пропорція (1) приметъ видъ:

$$\frac{GL}{3NF}=\frac{BG}{BF}=\frac{GC}{NF}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Это послѣднее соотношеніе выводится изъ треугольниковъ BGC и BFN. Рѣшая уравненіе (2), получаемъ GL=3GC; такимъ образомъ опредѣляется точка L на прямой DC. Соединяя точки K и L, мы получаемъ точку Q, а слѣдовательно и точку H. Дальнѣйшій ходъ отличается чрезвычайной простотой. Откладывая GF=GH и проводя чрезъ точку F линію FN параллельно DC, опредѣляемъ вторую точку сѣкущей N.

О. Перiаментъ (Одесса).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Границы слуха. Ловъ. (*J. K. Love.* Jour. of Anat. and Phys. 23. p. 336. 1889).

Недавно авторъ представилъ диссертацію въ Глазговскій Университетъ, въ которой особенно подробно разбираетъ вопросъ о чувствительности къ небольшимъ различіямъ въ высотѣ тоновъ.

Для этой цѣли онъ воспользовался двумя органными трубками, которыя могли удлиняться и укорачиваться при помощи микрометрическаго винта (имъ можно было дѣлать передвиженія отъ 3 дюймовъ до $^1/_{840}$ д.) Было устроено такъ, что сила, продолжительность и т. д. звука были всегда одни и тѣ-же. Всего было изслѣдовано болѣе 100 лицъ.

Наименьшая замѣтная разница въ высотахъ не могла быть точно опредѣлена у неразвитого слуха и у мало музыкальнаго, но ее можно довести (исключая не различающихъ тоны) до $\frac{1}{6}-\frac{1}{40}$ полутона. Обыкновенная граница есть $^1/_{24}$ полутона. Слухъ музыкантовъ, какъ напр. скрипачей, настройщиковъ и нѣкоторыхъ піанистовъ, можетъ открыть съ полной увѣренностью разницу въ $^1/_{64}-^1/_{80}$ полутона. Всѣ изслѣдуемыя лица, особенно же обладающія не выработаннымъ слухомъ, открывали разницу въ тонахъ, идущихъ вверхъ, легче, чѣмъ въ идущихъ внизъ. Въ общемъ законъ *Вебера*, за исключеніемъ самыхъ низкихъ и самыхъ высокихъ тоновъ, дѣйствителенъ для всѣхъ частей музыкальной гаммы.

Замѣчательный случай представлялъ одинъ господинъ, который могъ очень хорошо различать небольшіе интервалы, но былъ глухъ для всѣхъ тоновъ, лежащихъ выше D^5; онъ могъ слышать C^5 (4220 колебаній)

очень хорошо, но не слышалъ совершенно никакого звука, когда раздавалось E^5 (5280 колебаній). *Бхм.*

♦ **Температура снѣга на различныхъ глубинахъ и температура воздуха, прилегающаго къ снѣгу. Христони.** (*C. Cristoni.* Atti d. R. Acc. d. Lincei. 4. p. 278. 1888).

Авторъ воспользовался холодной зимой $188^7/_8$ и сильными снѣжными заносами въ Моденѣ, доходившими до $1^1/_2$ мет. глубины, чтобы произвести измѣренія температуры на различныхъ глубинахъ въ снѣгѣ. Для этого были имъ употреблены нѣсколько максимальныхъ и минимальныхъ термографовъ.

Ежедневная амплитуда температуры снѣгового слоя, непосредственно прелегающаго къ землѣ, едва 1°, а самая высшая его температура была всегда 0°, даже и тогда, когда наружная температура наружнаго воздуха долгое время находилась ниже 0° и верхній слой снѣга былъ тоже ниже нуля. Это обстоятельство авторъ объясняетъ тѣмъ, что почва, покрытая снѣгомъ, постоянно поддерживается теплой и сообщаетъ эту теплоту снѣгу.

Дальше было замѣчено, что разница между температурами прилегающаго къ почвѣ снѣга и самаго верхняго слоя достигаетъ около 10° и даже можетъ быть и больше; это конечно объясняется дурной тепло проводностью снѣга.

Минимумъ температуры перваго воздушнаго слоя, прилегающаго къ снѣгу, почти всегда ниже, чѣмъ минимумъ температуры верхняго слоя; только въ очень рѣдкихъ случаяхъ наблюдается противное. Это явленіе авторъ объясняетъ тѣмъ, что температура снѣга всегда отстаетъ отъ температуры воздуха; если при наступленіи дня воздухъ достигъ минимума температуры, то для снѣга требуется нѣсколько часовъ, чтобы принять температуру воздуха; кромѣ этого и лучи свѣта произведутъ свое вліяніе и нагрѣютъ снѣгъ, не достигшій еще своего minimum'а.

Два минимальные термографа были установлены такъ, что одинъ изъ нихъ находился на 3 цм. надъ снѣгомъ, а другой на 50 цм. (оба соотвѣтствующимъ образомъ защищались отъ ночного лучеиспусканія); они показали, что обыкновенно минимумъ температуры перваго воздушнаго слоя всегда ниже на 1—2 градуса, чѣмъ лежащаго надъ нимъ слоя. Только во время двухъ ночей, когда воздухъ былъ очень туманный, болѣе холодный слой лежалъ выше, что авторъ объясняетъ болѣе сильной теплопроводностью воздуха, котораго нижній слой нагрѣвался снѣгомъ.

Наконецъ очень интересенъ фактъ, что температура воздуха надъ снѣгомъ въ ночь на 20 января была найдена въ открытомъ полѣ равной —20,5°, тогда какъ въ ботаническомъ саду не далеко отъ стѣны —14°, а на обсерваторіи въ Моденѣ минимумъ въ эту ночь былъ —8,9°.
Бхм.

♦ **Фотографія туманнаго пятна M31, h44 и h51 въ Андромедѣ. Робертъ.** (*I. Roberts.* Mont. Not. of the Roy. Astr. Soc. 49. p. 65. $188^8/_9$).

Фотографіи, посланныя авторомъ (1 окт.) Лондонскому Астрон. Обществу, показываютъ намъ большое туманное пятно Андромеды совершенно въ иномъ свѣтѣ.

Впечатлѣніе, получаемое при взглядѣ на эти фотографіи, убѣждаетъ всякаго, особенно же поклонника гипотезы тумана, въ томъ, что вселенная такимъ именно путемъ и образовалась. Изъ нихъ видно какъ новая система сгущается изъ тумана,—центральное солнце лежитъ по среди туманнаго пятна, которое впослѣдствіи либо будетъ поглощено, либо раздѣлится на кольца. Наружные предѣлы тумана образовали уже кольца, расположенныя болѣе или менѣе симметрично къ ядру и напоминающія кольца Сатурна.

Два другихъ туманныхъ пятна: h44 и h51, какъ кажется, совершили уже свое превращеніе въ планеты. *Бхм.*

♦ **Вліяніе величины намагничиванія на измѣненіе электрическаго сопротивленія желѣза. Виссъ.** (*G. H. von Wyss.* Wied. Ann. 36. p. 447. 1889).

Авторъ нашелъ, что сопротивленіе намагниченнаго, желѣза увеличивается почти пропорціонально величинѣ магнитизма. *Бхм.*

♦ **Статистика солнца въ 1888 году. Вольфъ.** (*R. Wolf.* C. R. 108. p. 83. 1889).

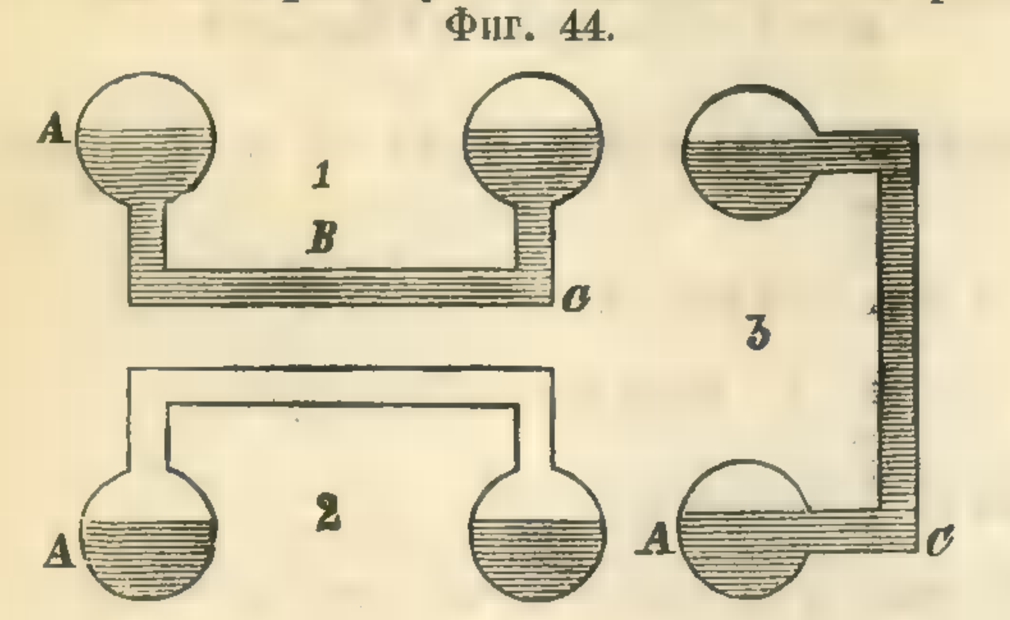
Авторъ, проф. астрономіи въ Цюрихѣ, наблюдаетъ вотъ уже 40 лѣтъ солнечныя пятна и ведетъ имъ точную статистику. На основаніи магнитныхъ наблюденій въ Миланской обсерваторіи онъ по извѣстной методѣ вычислилъ, какъ и раньше, и для 1888 года среднія числа (мѣсяца) для r—относительное число и v—колебанія склоненія магнитной стрѣлки, при чемъ онъ приводитъ и разность ($\triangle$) этихъ величинъ въ сравненіи съ 1887 годомъ. Изъ табл. этихъ величинъ, изъ которыхъ здѣсь приведены только среднія годовыя (r=6,7, $\triangle r$=—6,4; v=6,26 и $\triangle v$=—0,40) выходитъ, что какъ относительное число, такъ и магнитныя измѣненія уменьшились дальше, и что вѣроятно моментъ минимума солнечныхъ пятенъ еще не наступилъ, но онъ уже близокъ. Дальше отсюда слѣдуетъ, что небольшія уклоненія прошлаго года исчезли, и параллельность между этими обоими рядами явленій опять почти возстановлена. *Бхм.*

♦ **Физическое заблужденіе. Людвигъ.** (*Ludwig.* Humboldt. 8. p. 69. 1889).

Въ учебникахъ физики упоминается обыкновенно о *франклиновомъ кипятильникѣ*, какъ аппартѣ, предназначенномъ для демонстраціи воды или алкоголя при обыкновенной температурѣ въ безвоздушномъ пространствѣ. Въ физикѣ *Эйзенлора* находится напр. слѣдующее описаніе: „Кипятильникъ состоитъ изъ двухъ стекляныхъ шаровъ, соединенныхъ между собою стекляной же трубкой и содержащихъ небольшое количество воды (или окрашеннаго алкоголя). Воздухъ выгнанъ кипяченіемъ; поэтому вода въ томъ шарѣ, который находится у насъ въ рукѣ, кипитъ уже подъ вліяніемъ теплоты послѣдней".

Это не правильно; здѣсь происходитъ только простое испареніе. Если пары находятся съ жидкостью, изъ которой они образовались, еще въ сообщеніи, и пространство, занимаемое ими, уже насыщено ими, то при повышеніи температуры образуется новое количество пара, упру-

гость котораго увеличивается во первыхъ отъ теплоты, а во вторыхъ отъ увеличивающейся плотности.



Фиг. 44.

Если нагрѣть шаръ A (фиг. 44) кипятильника въ положенiи (1) и (3), то вслѣдствiе расширенiя пара жидкость сначала медленно перейдетъ во второй шаръ; а потомъ уже, когда паръ проникъ до C, онъ вырывается вслѣдствiе разности вѣсовъ жидкости и появляется въ видѣ пузырковъ. Если посредствомъ встряхиванiя заставить пузырекъ пара войти въ B, и нагрѣть его рукой, то онъ быстро будетъ увеличиваться, пока не достигнетъ обѣихъ вертикальныхъ линiй трубки, послѣ чего въ обоихъ шарахъ появляются пузырьки пара, вызывая такимъ образомъ кажущееся кипѣнiе. Помѣстивъ шаръ A подъ струю холодной воды, мы оттѣснимъ жидкость въ A, гдѣ и будутъ сначала появляться пузырьки пара. При положенiи (2) кипѣнiя вовсе не произойдетъ (отъ теплоты руки), а наступитъ только при болѣе высокой темпертурѣ. *Бхм.*

Открытыя новыя планеты въ 1888 году.

Въ теченiе 1888 года открыты слѣдующiя малыя планеты, принадлежащiя къ астероидамъ:

№	Названiе.	Число.	Открыватель.
272	Антонiя	4 февр.	Шарлуа.
273	Атропосъ	8 марта	Пализа
274	Филагорiя	3 апрѣля	„
275	Сапинтiя	15 „	„
276	Адельгайдъ	17 „	„
277	Эльвира	3 мая	Шарлуа
278	Паулина	16 „	Пализа
279	Туле	25 октября	„
280	Филiа	29 „	„
281	Лукрецiя	31 „	„

Бхм.

ЗАДАЧИ.

№ 472. Построить треугольникъ по основанiю, углу при основанiи и отношенiю двухъ другихъ сторонъ, не строя треугольниковъ подобныхъ данному.

А. Кудашевъ (Спб.)

№ 473. Опредѣлить x изъ уравненiя

$$x^x+139x^{-x}-108x^{-2x}=32.$$

И. Поршневъ (Вятка).

№ 474. Рѣшить треугольникъ, зная основаніе, медіану его и противолежащій уголъ. *И. Александровъ* (Тамбовъ).

№ 475. Въ плоскости треугольника ABC найти точки M и N при условіи, что каждая изъ суммъ

$$MA+MB+MC \text{ и } \overline{NA}^2+\overline{NB}^2+\overline{NC}^2$$

есть наименьшая. *Д. Ефремовъ* (Ив.-Возн.).

№ 476. Доказать справедливость тождества

$$\mathrm{Sin}(a+b)\mathrm{Sin}(a-b)\mathrm{Sin}(c+d)\mathrm{Sin}(c-d)+\mathrm{Sin}(c+b)\mathrm{Sin}(c-b)\mathrm{Sin}(d+a)\mathrm{Sin}(d-a)+$$
$$+\mathrm{Sin}(d+b)\mathrm{Sin}(d-b)\mathrm{Sin}(a+c)\mathrm{Sin}(a-c)=0.$$

И. Долбня (Нижн.-Новг.).

NB. Та-же задача была предложена и *И. Кетхудовымъ* изъ Нижняго-Новгорода.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 157. Между двумя колками, находящимися на разстояніи l другъ отъ друга, натянута струна, дающая N простыхъ колебаній въ секунду. Колокъ, къ которому прикрѣпленъ одинъ конецъ струны повернутъ на полъ оборота для того, чтобы еще болѣе натянуть струну. Спрашивается, какое число колебаній будетъ теперь давать струна, если извѣстны. l—длина струны, d—ея плотность, E—Юнговъ модуль упругости и ρ—радіусъ круглаго колка?

Въ натянутой струнѣ сила тренія колка о стѣнки гнѣзда, въ которое онъ вложенъ, уравновѣшиваетъ упругое сопротивленіе струны дальнѣйшему ея растяженію, и замѣняетъ собою непосредственно привѣшенный натягивающій грузъ. Завертывая колокъ, мы тѣмъ увеличиваемъ натягивающій грузъ. Извѣстно, что

$$N=\frac{1}{l}\sqrt{\frac{P}{q.d}},$$

гдѣ P есть величина натягивающаго груза, дѣйствующаго на площадь сѣченія q. При завертываніи колка измѣняется P въ P′, q въ q', d въ d'. Завернувъ колокъ на полъ оборота, мы вытянемъ проволоку на длину $\pi\rho$ или на часть $\frac{\pi\rho}{l}$ ея первоначальной длины, и эту вытянутую часть намотаемъ на колокъ; чтобы вытянуть такъ проволоку, потребна сила $E\frac{\pi\rho}{l}$ на каждую единицу площади ея сѣченія или сила $Eq\frac{\pi\rho}{l}$—на всю площадь сѣченія. Слѣдовательно

$$P'=P+Eq\frac{\pi\rho}{l}.$$

Поперечное сѣченіе проволоки уменьшится при этомъ на нѣкоторою часть λ своей первоначальной величины, слѣд.

$$q'=q(1-\lambda).$$

Плотность проволоки увеличится отъ поперечнаго ея сжатія и уменьшится отъ ея вытяженія прямо пропорціонально величинамъ того и другого, т. е.

$$d'=d\left(1+\lambda-\frac{\pi\rho}{l}\right).$$

Пренебрегая квадратомъ весьма малой величины λ и произведеніемъ λ на $\frac{\pi\rho}{l}$, получаемъ

$$q'.d'=qd\left(1-\frac{\pi\rho}{l}\right).$$

Называя чрезъ N' новое число колебаній струны, послѣ поворота колка, будемъ имѣть:

$$N'=\frac{1}{l}\sqrt{\frac{P'}{d'.q'}}=\frac{1}{l}\sqrt{\frac{P+Eq\frac{\pi\rho}{l}}{q.d\left(1-\frac{\pi\rho}{l}\right)}}.$$

Пренебрегая же квадратомъ величины $\frac{\pi\rho}{l}$, получимъ

$$N'=\frac{1}{l}\sqrt{\frac{P\left(1+\frac{\pi\rho}{l}\right)}{qd}+E\frac{\pi\rho}{ld}};$$

но

$$N=\frac{1}{l}\sqrt{\frac{P}{q.d}},$$

откуда

$$P=N^2.l^2.q.d,$$

слѣдовательно

$$N'=\frac{1}{l}\sqrt{N^2l^2\left(1+\frac{\pi\rho}{l}\right)+E\frac{\pi\rho}{ld}}.$$

NB. На эту задачу не было прислано ни одного удовлетворительнаго рѣшенія.

Прим. ред.

№ 340. Показать, что если въ треугольникѣ ABC

$$\angle A = 2\angle B,$$

то

$$a^2 = b^2 + bc.$$

Вѣрна ли обратная теорема? Разсмотрѣть случай прямоугольнаго треугольника.

На продолженіи CA отложимъ AD=AB и соединимъ D съ B. У треугольниковъ BCD и ABC угловъ C общій, $\angle D = \frac{1}{2}\angle BAC = \angle ABC$, а потому треугольники подобны. Изъ подобія ихъ

$$CD:BC = BC:AC \quad . . . . (1)$$

Отюда

$$BC^2 = CD.AC,$$

т. е.

$$a^2 = (b+c)b = b^2 + bc \quad . . . . (2)$$

Обратно изъ равенства (2) получается пропорція (1), а слѣдовательно треугольники BCD и ABC, у которыхъ кромѣ того уголъ C общій,—подобны. Изъ подобія ихъ

$$\angle BAC = \angle DBC,$$

а такъ какъ $\angle ABD = \frac{1}{2}\angle BAC$, то и $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle BAC$, т. е. и обратная теорема вѣрна.

Если $\angle C = 90°$, то $b = \frac{c}{2}$.

Н. Николаевъ (Пенза), *В. Гиммельфарбъ* (Кіевъ), *Ивановскій* (Воронежъ), *М. Лянченко* (Кострома), *В. Михайловъ* (Харьк.), *И. К.* и *Н. Артемьевъ* (Спб.), *П. Трипольскій* (Полтава), *С. Блажко* (Москва), *В. Соллертинскій* (Гатчино). Ученики: Ворон. к. к. (7) *А. П.*, Полоцк. к. к. (7) *В. Т.* 1-й, Оренб. г. (8) *Ан. П.*, Екатрсл. г. (6) *А. С.*, Кишин. р. уч. (7) *Д. Л.*, Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*, Крем. р. уч. (5) *I. Т.*

№ 345. На катетахъ AB и BC прямоугольнаго треугольника строимъ соотвѣтственно квадраты ABDE и BCFG, соединяемъ вершину C съ E, вершину A съ F и опускаемъ изъ вершины прямого угла B перпендикуляръ BH на гипотезу. Доказать, что три прямыя AF, BH и CE пересѣкаются въ одной точкѣ.

Пусть CE пересѣкаетъ AB въ точкѣ M, а AF пересѣкаетъ BC въ точкѣ N. Изъ подобія треугольниковъ AEM и MBC имѣемъ:

$$AB:AM = BC:BM,$$

откуда

$$AB.BM=AM.BC \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

Изъ треугольниковъ же CFN и ABN найдемъ

$$AB.CN=BC.BN \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Изъ соотношенія

$$BC^2:AB^2=CH:AH$$

получимъ:

$$BC^2.AH=AB^2.CH \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

Перемноживъ между собой эти три равенства, находимъ

$$BM.NC.AH=AM.BN.CH,$$

это и доказываетъ нашу теорему.

В. Гиммельфарбъ (Кіевъ), *Мильскій* (?), *Н. Ивановскій* (Ворон.), *С. Шатуновскій* (Кам.-Под.), *В. Соллертинскій* (Гатчино), *П. Трипольскій* (Полтава), *С. Блажко* (Москва). Ученики: Ворон. к. к. (6) *Н. В.*, и (7) *Д. П.*, Ектрсл. г. (6) *А. С.*, 1-й Спб. (7) *А. К.*, Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*

№ 353. Опредѣлить три цѣлыя положительныя числа такъ, чтобы сумма каждыхъ двухъ дѣлались безъ остатка на третье.

По условію задачи имѣемъ

$$\frac{x+y}{z}=a,\quad \frac{x+z}{y}=b,\quad \frac{z+y}{x}=c,$$

гдѣ a, b и c суть цѣлыя числа.

Возьмемъ для x произвольное цѣлое значеніе m, тогда наши уравненія представятся въ такомъ видѣ

$$m+y=az,\quad m+z=by,\quad z+y=mc.$$

Изъ первыхъ двухъ найдемъ

$$y=m\frac{a+1}{ab-1},\quad z=m\frac{b+1}{ab-1},\quad . \ . \ . \ . \ (1)$$

а взамѣнъ третьяго получимъ тогда

$$\frac{a+b+2}{ab-1}=c,$$

что показываетъ, что это выраженіе должно быть цѣлымъ числомъ. Это очевидно возможно лишь при условіи $ab-1=1$, или $ab=2$; при этомъ же условіи, какъ видно изъ (1) y и z тоже будутъ цѣлыми. Итакъ для x имѣемъ произвольное цѣлое значеніе m, а для y и z—выраженія (1), въ которыхъ для a и b должны быть взяты значенія, удовлетворяющія

условію $ab=2$, т. е. 1 и 2. Подставивъ эти значенія вмѣсто a и b, получимъ окончательно

$$x=m,\ y=2m,\ z=3m.$$

С. Шостакъ (Алушта), *С. Шатуновскій* (Кам.-Под.). Ученикъ Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*

№ 355. Данъ кругъ и внѣ его точка P; проведемъ сѣкущія AP и BP, внѣшніе отрѣзки которыхъ пусть будутъ соотвѣтственно CP и DP; соединимъ (накрестъ) точку A съ D и точку C съ B и назовемъ пересѣченіе хордъ AD и CB буквою M. Доказать, что

$$PA:PD=AM:CM$$

и вывести условіе, при которомъ около четыреугольника MCPD можно описать окружность.

Соединимъ C съ D и A съ B. Извѣстно, что

$$PA:PB=PD:PC,$$

откуда

$$PA:PD=PB:PC,$$

а такъ какъ у треугольниковъ APB и CPD кромѣ того уголъ P общій, то они подобны; изъ подобія ихъ

$$PA:PD=AB:CD;$$

а изъ подобія треугольниковъ AMB и CMD

$$AM:MC=AB:CD,$$

слѣдовательно

$$PA:PD=AM:MC.$$

Углы ACB и ADB равны, а если четыреугольникъ PCMD вписанный, то сумма ихъ должна равняться $2d$, и потому каждый изъ нихъ долженъ быть прямымъ. Слѣдовательмо, чтобы четыреугольникъ PCMD былъ вписаннымъ, необходимо и достаточно, чтобы PA и PB опирались на концы діаметра.

Махинъ и *А. Корвинъ-Кучинскій* (Ворон.), *В. Соллертинскій* (Гатчино), *Ст. Вронскій* (Севастополь), *Ив. Колотовъ* (Вятка), Ученики: Кіев. к. к. (5) *О. И.*, Ектрсл. г. (6) *А. С.*, Полт. дух. сем. (3) *С. З.*, 2-й Кіев. г. (7) *В. М.* Оренб. г. (8) *А. П.*, Кам.-Под. г. (7) *А. Р.*

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Кіевъ, 7 Августа 1889 г.
Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.